Eiden p52

PAR 5 POINTS PASSE UNE CONIQUE

162, 171, 181

Soient A, B, C, D et E cinq points distincts d'un plan affine $\mathcal{P}$.

1 ▸ Il existe une conique de $\mathcal{E}$ passant par A, B, C, D et E.

2 ▸ Cette conique est unique si, et seulement si 4 points (quelconques) parmi ces 5 ne sont pas alignés.

3 ▸ Cette conique est non dégénérée si, et seulement si 3 points (quelconques) parmi ces 5 sont non alignés.

---

1 ▸ Si les 5 points sont alignés, alors un couple de droites convient (en particulier, il en existe une infinité).
Supposons ces 5 points non alignés. Quitte à les renommer, (A, B, C) forme une base affine de $\mathcal{P}$. On note (X, Y, Z) les coordonnées barycentriques dans (A, B, C). Une conique de $\mathcal{P}$ a une équation dans (A, B, C) de la forme $aX^2 + bY^2 + cZ^2 + pXY + qXZ + rYZ = 0$. Une conique passe par $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$ et $C = (0,0,1)$ si, et seulement si son équation est de la forme $pXY + qXZ + rYZ = 0$.
Notons $D = (x_1, y_1, z_1)$ et $E = (x_2, y_2, z_2)$ les coordonnées barycentriques de D et E dans (A, B, C). Une conique passant par A, B, C, D et E aurait donc une équation de la forme $pXY + qXZ + rYZ = 0$, où p, q et r sont solution du système $\{ px_1y_1 + qx_1z_1 + ry_1z_1 = 0 \,;\, px_2y_2 + qx_2z_2 + ry_2z_2 = 0$ qui est de rang ≤ 2. Ce système admettant au moins une solution, il existe au moins une conique passant par A, B, C, D et E.

2 ▸ L'unicité d'une telle conique équivaut à l'unicité à une constante multiplicative près de la solution du système ci-dessus, autrement dit à ce que $\dim\left(\operatorname{Ker}\begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1z_1 & y_1z_1 \\ x_2y_2 & x_2z_2 & y_2z_2 \end{pmatrix}\right) = 1$, i.e. à ce que le rang de ce système soit 2. Le rang d'un système (d'une matrice) étant l'ordre du plus grand mineur inversible, le rang de ce système est ≤ 1 si, et seulement si les 3 mineurs d'ordre 2 sont nuls. Ces mineurs sont :

$$\begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1z_1 \\ x_2y_2 & x_2z_2 \end{vmatrix} = x_1x_2 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & y_1 & y_2 \\ 0 & z_1 & z_2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x_1z_1 & y_1z_1 \\ x_2z_2 & y_2z_2 \end{vmatrix} = z_1z_2 \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & y_1 & y_2 \\ 1 & z_1 & z_2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x_1y_1 & y_1z_1 \\ x_2y_2 & y_2z_2 \end{vmatrix} = y_1y_2 \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ 1 & y_1 & y_2 \\ 0 & z_1 & z_2 \end{vmatrix}$$

▷ Supposons que ce système est de rang ≤ 1, i.e. qu'il existe une infinité de coniques passant par A, B, C, D et E.
Si D et E n'appartiennent ni à (AB), ni à (AC), ni à (BC), i.e. si $x_1x_2y_1y_2z_1z_2 \neq 0$, alors la nullité des 3 mineurs ci-dessus équivaut à la nullité des déterminant 3×3, ce qui équivaut respectivement à $A \in (DE)$, $C \in (DE)$ et $B \in (DE)$.
En particulier, A, B et C sont alignés : c'est impossible car (A, B, C) est une base affine de $\mathcal{P}$. Ainsi, D ou E appartient à (AB) ou à (AC) ou à (BC). Pour fixer les idées, disons que $D \in (AB)$, i.e. $z_1 = 0$. Comme $D \notin \{A, B\}$, $x_1y_1 \neq 0$. Par hypothèse, $0 = \begin{vmatrix} x_1y_1 & \cancel{x_1z_1} \\ x_2y_2 & x_2z_2 \end{vmatrix} = x_1y_1x_2z_2$, donc $x_2z_2 = 0$, et $0 = \begin{vmatrix} x_1y_1 & \cancel{y_1z_1} \\ x_2y_2 & y_2z_2 \end{vmatrix} = x_1y_1y_2z_2$, donc $y_2z_2 = 0$. Ainsi, si $z_2 \neq 0$, alors $x_2 = y_2 = 0$, donc $E = C$, ce qui n'est pas. Donc $z_2 = 0$, i.e. $E \in (AB)$. On a donc montré que 4 points sont alignés.

▷ Réciproquement, si 4 points sont alignés, alors il existe une infinité de couples de droites passant par A, B, C, D et E.

3 ▸ Par définition, une conique est non dégénérée si elle est le lieu d'annulation d'une forme quadratique non dégénérée.
Avec les notations précédentes, la conique $\mathcal{C} : pXY + qXZ + rYZ = 0$ est le lieu d'annulation de la forme quadratique dont la matrice est $\begin{pmatrix} 0 & r & q \\ r & 0 & p \\ q & p & 0 \end{pmatrix}$ — son déterminant est $2pqr$. Ainsi, $\mathcal{C}$ est non dégénérée si, et seulement si $pqr \neq 0$.

▷ Si $pqr = 0$, alors par exemple $p = 0$, donc $\mathcal{C} : Z(qX + rY) = 0$ est un couple de droites, donc au moins 3 points sont alignés.

▷ Réciproquement, si 3 points sont alignés, alors $\mathcal{C}$ est un couple de droites [Dessin]. Justifions qu'elle est dégénérée :

il existe deux formes linéaires φ et ψ telles que $\mathcal{C} : \varphi(X,Y,Z)\,\psi(X,Y,Z) = 0$. Comme $\varphi\psi = \frac{1}{4}\left((\varphi+\psi)^2 - (\varphi-\psi)^2\right)$, $\begin{pmatrix} 0 & r & q \\ r & 0 & p \\ q & p & 0 \end{pmatrix}$ est congruente à $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et donc est dégénérée.

COMMENTAIRES :

- On suppose implicitement que P est défini sur un corps infini — typiquement, $\mathbb{R}$.
  On exclue le cas des coniques vides ou ponctuelles, qui contiennent moins de 5 points.
- Cor (bonus) : Si deux coniques distinctes s'intersectent en plus de 4 points, alors elles coïncident sur une droite.